THÉORÈME D'AUERBACH & INÉGALITÉ D'HADAMARD

Thm 1 (inégalité de HADAMARD) : Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{K}^n$, $\|\cdot\|$ la norme associée et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de V. Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{K}^n)^n$, $|\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|$ avec égalité si et seulement si $(x_1, \dots, x_n)$ est orthogonale.

Thm 2 (d'AUERBACH) : Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel de dimension $n \geqslant 1$. Il existe une base unitaire (i.e. constituée de vecteurs de norme 1) de V dont la base duale est unitaire (pour la norme $|||\cdot|||$ subordonnée à $\|\cdot\|$.

Preuve de Thm 2 : Observons que si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base unitaire de V, alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $e_i^*(e_i) = 1$, donc $|||e_i^*||| \geqslant 1$.
(Rq : si $\|\cdot\|$ découle d'un produit scalaire, alors $|||e_i^*||| \leqslant 1$ d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, et donc n'importe quelle base unitaire convient.)
Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base unitaire de V. Notons S^1 la sphère unité de V. Posons $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto |\det_{\mathcal{B}_0}(x_1, \dots, x_n)|$. Elle est continue sur $(S^1)^n$, lequel est compact car V est de dimension finie, donc f atteint son maximum en une famille unitaire $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \in (S^1)^n$. Comme $f(\mathcal{B}) \geqslant f(\mathcal{B}_0) = 1 > 0$, $\mathcal{B}$ est une base unitaire de V. Soient $i \in [\![1,n]\!]$, $x \in S^1$ et $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \dots, e_n)$. Par maximalité de $\mathcal{B}$:

$$f(\mathcal{B}) \geqslant f(\mathcal{F}) = |\det_{\mathcal{B}_0}(e_1, \dots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \dots, e_n)| = \left|\det_{\mathcal{B}_0}\left(e_1, \dots, e_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} e_j^*(x) e_j, e_{i+1}, \dots, e_n\right)\right|$$
$$= \left|\sum_{j=1}^{n} e_j^*(x) \det_{\mathcal{B}_0}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_j, e_{i+1}, \dots, e_n)\right| = \left|\sum_{j \neq i} 0 + e_i^*(x) \det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})\right| = |e_i^*(x)|\, f(\mathcal{B})$$

et donc $|e_i^*(x)| \leqslant 1$. De là, $|||e_i^*||| \leqslant 1$, et donc $|||e_i^*||| = 1$: finalement, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^*$ sont unitaires. ■

Preuve de Thm 1 : Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{K}^n)^n$. Si $\mathcal{F}$ est liée, alors il n'y a rien à faire. Supposons $\mathcal{F}$ libre. Notons $\mathcal{F}' = (y_1, \dots, y_n)$ la famille orthogonale obtenue à partir de $\mathcal{F}$ par le procédé d'orthogonalisation de GRAM-SCHMIDT. Plus précisément, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure avec une diagonale de 1 telle que $\mathcal{F}' = A\mathcal{F}$. En particulier, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}') = \det(A) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$. Notons M la matrice dont les colonnes sont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ de $y_1, \dots, y_n$, de sorte que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}') = \det(M)$. Comme ${}^t\overline{M}M = (\langle y_i | y_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \mathrm{Diag}(\|y_1\|^2, \dots, \|y_n\|^2)$, donc $|\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}')| = |\det(M)|^2 = \det({}^t\overline{M}M) = \prod_{k=1}^{n} \|y_k\|^2$.
Écrivons $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On a $y_1 = x_1$ et $\forall k \in [\![2,n]\!]$, $x_k = y_k - a_{k,1} y_1 - \dots - a_{k,k-1} y_{k-1}$, donc d'après le théorème de PYTHAGORE, $\|x_k\|^2 = \|y_k\|^2 + |a_{k,1}|^2 \|y_1\|^2 + \dots + |a_{k,k-1}|^2 \|y_{k-1}\|^2$, avec égalité si et seulement si $a_{k,1} = \dots = a_{k,k-1} = 0$, i.e. $A = I_n$, i.e. $\mathcal{F}$ est orthogonale. ■